低阶矩阵和行列式简介

宋宁
山东理工大学 数学与统计学院

更新：June 15, 2019

摘　要

本文介绍了二阶、三阶矩阵和行列式的基本知识，包括定义、基本性质、克拉默法则及其应用.

关键词： 矩阵，行列式

1　矩阵

通俗地说，矩阵就是一个表，表中所填的内容是数．对于与矩阵有关的概念，本节给出相关定义.

为了清晰起见，我们通常用一对圆括号将矩阵包裹起来，并使用大写英文字母标记矩阵.

例 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

是一个矩阵.

矩阵中的每个数都叫该的一个**元素**，例1.1中的矩阵 A 有 15 个元素．矩阵中横向的一排元素叫做该矩阵的一**行**，比如说，例1.1中矩阵 A 的第 2 行就是

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

例1.1中的矩阵 A 有 3 行.

矩阵中纵向排列的一排元素叫做该矩阵的一**列**，比如说，例1.1中矩阵 A 的第 4 列就是

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix},$$

例1.1中的矩阵 A 共有 5 列.

如果矩阵 A 由 m 行 n 列构成，那么我们也说 A 是一个 $m\times n$ **矩阵**，从而也可以将 A 记作 $A_{m\times n}$. 例1.1中的矩阵 A 就是一个 3×5 的矩阵，因此也可以将该矩阵记作 $A_{3\times 5}$.

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵. 注意既落在 A 的第 i 行也落在 A 的第 j 列的元素只有一个，我们称这个元素为 A 的 (i,j) 元素. 设 A 的 (i,j) 元素为 a_{ij}. 那么我们也会把 $m\times n$ 矩阵 A 记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，或 $A=(a_{ij})$. 于是，当我们以后说：矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其实是指

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行数和列数相等的矩阵叫做**方阵**，它的行数或列数就叫做这个方阵的**阶**，例如

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶方阵. 在解析几何中最常见的矩阵就是二阶和三阶方阵.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$. 如果对所有的 i 和 j 都有 $b_{ij}=a_{ji}$，那么就称矩阵 B 为矩阵 A 的**转置**. 矩阵 A 的转置记作 A^T 或 A'. 例如，例1.1中的矩阵 A 的转置为

$$A^T=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \\ 9 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

2 行列式

通俗地来讲，n 阶行列式是一种以 n 阶方阵 为自变量的函数，方阵 A 的行列式记作 $\det\ A$ 或 $|A|$，本节将给出其定义.

在解析几何中最常用的行列式是二阶和三阶行列式，下面我们只给出二阶和三阶行列式的定义，更为一般的 n 阶行列式将在《高等代数》课程中给出定义.

设 $A=(a_{ij})_{2\times 2}$. 那么 A 的行列式（二阶行列式）定义为

$$\det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$．那么 A 的行列式（三阶行列式）定义为

$$\det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

注. 二阶和三阶行列式的定义呈现出一种规律，即所谓**对角线法则**，请同学们自行总结．

练习

2.1. 总结对角线法则．

3　行列式的性质

本节给出行列式的基本性质，虽然我们目前主要使用二阶和三阶行列式，但是本节给出的性质适用于任意阶行列式．详细的证明将在《高等代数》课中给出，在本节，你只需针对二阶和三阶行列式给出证明即可．

定理 3.1. 设 A 是一个方阵．

(i) $\det\ A^T=\det\ A$.

(ii) 如果 B 是交换 A 的两行或两列得到的矩阵，那么 $\det\ B=-\det\ A$.

(iii) 如果 A 有两行或两列完全相同，那么 $\det\ A=0$.

(iv) 如果 B 是将 A 某一行或某一列的所有元素乘以实数 s 所得到的矩阵，那么 $\det\ B=s\det\ A$.

(v) 如果 A 有两行或两列成比例，那么 $\det\ A=0$.

定理 3.2. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵，其第 k 行满足 $a_{kj}=b_j+c_j$，$j=1,2\ldots,n$．那么

$$\det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1}\end{vmatrix}.$$

对于行列式的列，有类似的结论成立，请自行总结．

定理 3.3. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵，s 是一个实数．设 B 是另一个 n 阶方阵，它与 A 的差别只出现在第 j 行上，它的第 j 行是用 A 的第 j 行再加上 A 的第 i 行元素的 s 倍所得到的．那么

$\det\ A = \det\ B$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+sa_{i1} & a_{j2}+sa_{i2} & \cdots & a_{jn}+sa_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}.$$

对于行列式的列，有类似的结论成立，请自行总结.

定理 3.4. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 3 阶方阵. 那么

$$\det\ A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

练习

3.1. 在阶数为 2 和 3 的前提下，证明定理3.1.

3.2. 在阶数为 2 和 3 的前提下，证明定理3.2.

3.3. 在阶数为 2 和 3 的前提下，证明定理3.3.

3.4. 证明定理3.4.

3.5. 探索定理3.4的变体.

4 克拉默法则

多元一次方程组，我们一般称之为**线性方程组**. 克拉默法则从理论上解决了未知量与方程同样多的线性方程组的求解问题. 我们这里更关注二元和三元的情况，更一般的情况仍然请参考《高等代数》.

考虑如下线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

线性方程组 (1) 有 n 个未知量，m 个方程. 其中，$x_1, \ldots, x_n$ 是它的 n 个未知量，$b_1, \ldots, b_m$ 是它的 m 个常数项，而所有 a_{ij}（$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$）都是它的系数. 将所有这些系数整理成矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，我们称 A 是 (1) 的**系数矩阵**.

对于 $m \neq n$ 的情况，我们此处不考虑，详情请参考《高等代数》. 下面考虑 $m = n$ 的情况，也就是系数行列式为方阵的情况. 当线性方程组的系数矩阵 A 为方阵时，称 $\det A$ 为 (1) 的**系数行列式**.

定理 4.1 (克拉默法则)**.** *当 $m = n$ 时，方程组 (1) 有唯一解的充要条件是 $\det A \neq 0$；进一步地，这个解为*

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d}, \ldots, x_n = \frac{d_n}{d},$$

其中 $d = \det A$，d_i 是将 $\det A$ 的第 i 行换成

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

所得到的行列式.

设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵. 从 A 中任取两行两列，它们的交叉处有四个元素，将这四个元素依然按照原来的位置排成一个二阶行列式，这个二阶行列式叫做矩阵 A 的一个**二阶子式**. 例如，对例1.1中的矩阵 A 而言，如下行列式就是它的一个二阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}.$$

定理 4.2. *考虑三元线性方程组*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

设方程组 (2) 的系数矩阵为 A. 如果 A 有一个二阶子式非零，那么

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

练习

4.1. 尝试使用克拉默法则口算一个二元一次方程组的解。

4.2. 使用克拉默法则证明定理4.2.